

Ragionamento deduttivo: Il calcolo dei predicati



1.2 La logica formale: un percorso a tappe

Gli strumenti della logica matematica costituiscono un valido supporto per il pensiero critico, perché aiutano a pensare e comunicare, ma anche a distinguere i ragionamenti corretti da quelli fallaci.

È un percorso a tappe.

La prima tappa (la più semplice) è la logica delle proposizioni, che affronta i meccanismi razionali del ragionamento deduttivo.

La seconda è la logica categorica.

“Categorizzare” vuol dire affermare l’appartenenza di un elemento a una classe di oggetti che condividono alcune proprietà.

Per esempio: “Socrate è un uomo e, in quanto uomo, ha tutte le caratteristiche degli uomini”.

La logica categorica può essere interpretata intuitivamente in termini insiemistici:

- gli enunciati universali consentono di affermare relazioni di inclusione di una classe in un’altra... o di mutua esclusione.
- alcuni enunciati particolari possono affermare la parziale sovrapposizione tra gli insiemi corrispondenti a due classi.

I predicati che incontriamo nella logica categorica si dicono “monadici”, perché sono usati in schemi del tipo

“S è P”,

dove S è il soggetto e P è il predicato che esprime una proprietà del soggetto.

Un predicato monadico può essere scritto in un altro modo, usando le parentesi per racchiudere l'argomento.

In questo caso, P è il predicato e il soggetto " S " è l'argomento del predicato. Ma potremmo indicare l'argomento con un generico " x ", usando una diversa notazione.

Come puoi notare, i sillogismi aristotelici, che costituiscono la formulazione più nota della logica categorica, sono costruiti con predicati monadici.

Poi ci sono i predicati poliadici, il cui calcolo costituisce la terza tappa di questo percorso.

1.3 Il calcolo dei predicati (CPR)

Il calcolo dei predicati considera, in generale, quelli che ammettono più di un argomento e, quindi, affermano una relazione tra più elementi.

Si chiamano "predicati poliadici" e si rappresentano in diversi modi...

Ecco alcuni predicati poliadici con a fianco gli enunciati corrispondenti...

Se la relazione è binaria, cioè tra due elementi, di solito è possibile individuare una relazione inversa...

Una precisazione, prima di proseguire.

Il calcolo dei predicati occupa una vasta area della logica, ma qui ci limitiamo al calcolo del primo ordine, chiamato anche logica del primo ordine o, in inglese, first order logic.

Solo per dare un'idea, nel calcolo dei predicati di secondo ordine, gli argomenti delle relazioni possono rappresentare non solo individui ma anche interi enunciati.

Questo aumenta l'espressività del linguaggio, ma ne rende molto più difficile la trattazione.

1.4 Alcune proprietà delle relazioni

Certe proprietà delle relazioni sono particolarmente importanti, perché consentono di fare inferenze di interesse pratico.

Vediamo qualche caso.

Alcune relazioni inverse si possono derivare dalla corrispondente relazione diretta, cioè hanno lo stesso valore di verità ad argomenti invertiti.

Per esempio, se

"Anna è la madre di Marco"

è sicuramente vero che

"Marco è figlio di Anna".

E la stessa cosa si può dire per relazioni tipo "minore-di".

Ma non è sempre vero per "ama". Nel nostro esempio, quello di Sofia per Mario potrebbe essere un amore infelice, non corrisposto!

Esistono poi relazioni simmetriche, come “parente”, che restano immutate scambiando l’ordine degli argomenti.

Alcune relazioni come “minore-di” e “maggiore-di” hanno un’altra proprietà interessante: la transitività.

Nel caso di “maggiore-di”, se “x” è maggiore di “y” e “y” è maggiore di “z”, deduciamo, senza ombra di dubbio, che “x” è maggiore di “z”.

1.5 Logica e linguaggio naturale

È sempre importante tener presente che il rapporto tra linguaggio naturale ed espressioni logiche non è sempre così lineare.

Per esempio, la relazione “amico-di” è formalizzata come relazione simmetrica su Facebook, dove appunto si usa il plurale “amici”.

Ma nella realtà raramente la relazione di amicizia è davvero simmetrica!

Ci sono poi relazioni che sono transitive, ma... fino a un certo punto.

È il caso della relazione “parente-di”, in cui comprendiamo anche i parenti acquisiti.

Se

“Mario è parente di Giulia”,

“Giulia è parente di Roberto”,

“Roberto è parente di Rosalba” e

“Rosalba è parente di Geltrude”,

si può certo dire che

“Mario è parente di Roberto”.

Ma possiamo dire che Mario parente anche di Geltrude?

Qui dobbiamo verificare di che contesto stiamo parlando. Per esempio, in ambito legale la parentela è considerata fino a un certo grado!

1.6 Il linguaggio del calcolo dei predicati

Il calcolo dei predicati usa un linguaggio formale con termini e simboli ereditati dal calcolo delle proposizioni e dal calcolo sillogistico insieme a estensioni proprie.

Dal calcolo delle proposizioni troviamo:

- Variabili proposizionali o enunciative, rappresentate usualmente dalla lettera “p” e seguenti.
- Connettivi logici.
- Simboli ausiliari o di punteggiatura, tra cui la virgola, che separa gli enunciati che rappresentano le premesse in un’argomentazione, e le parentesi tonde, che specificano la priorità nell’applicazione dei

connettivi logici.

Dal calcolo sillogistico troviamo:

- Variabili individuali, come “x”, “y” e “z”, che stanno per oggetti generici. Come vedremo, le loro occorrenze possono essere libere o vincolate.
- Simboli di oggetti particolari (cioè individui).

Simboli per predicati monadici, costituiti per lo più da lettere maiuscole.

Oltre a questi, il calcolo dei predicati usa simboli di quantificazione per indicare gli enunciati universali e particolari, che il linguaggio dei sillogismi esprime con parole:

- La quantificazione universale corrisponde a: “per ogni x” (in cui “x” è un determinato elemento) “si può dire questo o quello”.

Per esempio:

“Per ogni uomo, l’uomo è mortale”.

Quando è presente, l’espressione “F di x” restringe il campo. Significa che il nostro enunciato si applica solo agli individui che hanno una determinata proprietà.

“Per ogni uomo che è un contribuente, l’uomo paga le tasse.

- La quantificazione esistenziale corrisponde a: “esiste almeno un x tale che...” più un enunciato.

Esempio:

“Esiste almeno un uomo che è nato a Forlì”, significa che a Forlì è nato almeno un uomo, ma - per quel che ne sappiamo - potrebbero anche esserci nati tutti gli uomini della Terra!

Come simbolo di un predicato poliadico, di solito si usa una lettera maiuscola, che può essere seguita dal numero degli argomenti, posto, per lo più, come esponente.

1.7 Esprimere i sillogismi con il linguaggio dei predicati

Possiamo usare il linguaggio del calcolo dei predicati per esprimere i sillogismi.

Ecco, appunto, un sillogismo:

“Nessun pesce ha i polmoni.

Tutte le carpe sono pesci.

Quindi nessuna carpa ha i polmoni.”

Per capire come procedere, osserviamo che il secondo dei tre enunciati può essere riformulato così:

“Se un individuo è una carpa, allora quell’individuo è un pesce.”

Nel linguaggio simbolico del calcolo dei predicati, l’enunciato diventerebbe...

Nel linguaggio simbolico del calcolo dei predicati, l’enunciato diventerebbe...

Attenzione: ho detto “diventerebbe”, perché in questo passaggio ci siamo persi qualcosa: “x” è una variabile che andrebbe istanziata, cioè vincolata a uno specifico individuo o insieme - più o meno ampio - di individui.

In questo caso, usiamo il quantificatore universale, perché diciamo qualcosa che riguarda tutte le carpe.

Ora possiamo leggere questa formula come:

“Per ogni individuo x , se x è una carpa, x è un pesce”.

Un'altra cosa: scrivendo la formula, abbiamo usato le parentesi per chiarire che qui la quantificazione si applica all'intera implicazione.

Ora applichiamo lo stesso linguaggio per riscrivere il primo enunciato, che possiamo leggere così:

“Non esiste alcun x tale che x sia una pesce ed x abbia i polmoni”.

Infine, per completare l'opera, riscriviamo in termini di calcolo dei predicati anche la conclusione del sillogismo.

Conclusione che ha la stessa forma della prima premessa e un'interpretazione simile.

1.8 Quantificatori e universo del discorso

Un'implicazione come questa...

... è una forma enunciativa e non un vero enunciato. E lo stesso vale per le due proposizioni che la compongono.

Il motivo è semplice: non possiamo dire se sono vere o false, finché non sappiamo il valore della variabile “ x ”.

Per ottenere un enunciato, ci serve qualche informazione in più.

Per dare un significato alle formule e ai simboli che vi compaiono, innanzitutto dobbiamo scegliere l'universo del discorso, che per brevità chiamiamo “dominio”.

Un dominio può essere l'insieme degli esseri umani, dei pesci, dei filosofi, dei politici e qualunque insieme di “oggetti” della realtà:

- che possono essere denotati individualmente mediante i simboli di oggetti particolari del linguaggio del calcolo dei predicati
- e su cui possono spaziare le variabili individuali che compaiono nel campo di azione dei quantificatori.

Dopo aver scelto il dominio possiamo procedere in due modi.

Il primo è scegliere come valore per la variabile un determinato oggetto nel dominio.

Se il dominio è l'insieme degli esseri umani, il nostro “ x ” può essere Socrate. Ecco un enunciato valido in cui P è il simbolo di un generico predicato.

Il secondo modo per dare significato a una formula enunciativa è “chiuderla” con un quantificatore, in modo che non vi compaiano più variabili libere:

- Se vi è inclusa una sola variabile individuale “ x ”, la possiamo inserire nel campo di azione di un quantificatore premettendo “per ogni x ...” oppure “esiste almeno un x ...”
- Se le variabili individuali sono più d'una, perché magari contiene una relazione binaria come madre-di (x , y), è necessario raddoppiare il quantificatore, ottenendo, per esempio un enunciato come:

“Esistono almeno un umano x e un umano y tali che x è madre di y ”.

1.9 L'interpretazione dei predicati

Per interpretare le formule costruite con il linguaggio del calcolo dei predicati, dobbiamo capire che significano i simboli di predicato.

Per ogni predicato monadico, la nostra interpretazione, per ogni possibile “ x ”, ci deve consentire di dire se è vero o falso.

Come funziona questa interpretazione?

In due modi.

Per capirli partiamo da un esempio in cui il predicato “ P ” è “medico” e il dominio è quello degli italiani.

Per interpretare il predicato possiamo fare così:

- Definire il criterio per stabilire se un italiano è medico. In questo caso sappiamo che deve essere laureato in medicina e iscritto all'Ordine dei medici.

Oppure

- enumerare gli oggetti del dominio per i quali il predicato “medico” è vero. È un elenco piuttosto lungo che contiene tutti i nomi degli iscritti all'ordine dei medici.

Con un predicato poliadico, vale lo stesso ragionamento, con la differenza che la relazione riguarda due o più elementi.

Per esempio, la relazione “madre-di” può essere interpretata definendo cosa significa essere madre o con un elenco di tutte le coppie “madre-figlio” all'interno di un certo dominio.

Questa interpretazione può avere importanti conseguenze a seconda se si stia parlando di madre biologica, madre adottiva, madre spirituale o, magari, madre surrogata.

1.10 Le funzioni nel calcolo dei predicati

A questo punto, possiamo introdurre un altro tipo di elemento che estende ulteriormente il linguaggio del calcolo dei predicati. Si tratta delle funzioni.

Una funzione permette di individuare univocamente un oggetto, all'interno di un dominio, a partire da uno o più altri oggetti con cui è in relazione.

Pensiamo al dominio degli esseri umani, a proposito del quale possiamo scrivere un enunciato come:

“Per ogni oggetto x esiste un oggetto y tale che y è madre di x ”

In questo dominio è definita la funzione “madre di x ”, che, partendo da un essere umano “ x ”, permette di individuare la madre.

In questo caso, l'interpretazione della funzione madre è basata su quella della relazione “madre-di” che è una relazione binaria, perché mette in relazione ogni madre “ y ” con il proprio figlio “ x ”.

1.11 Regole di inferenza

È piuttosto complesso dimostrare le regole di inferenza del calcolo dei predicati, comunque la si effettui: in termini algebrici (con passaggi puramente simbolici) o in termini delle proprietà del dominio.

Per questo, presentiamo senza dimostrazioni un piccolo campionario di regole!

In primo luogo, osserviamo che il calcolo dei predicati eredita dal calcolo delle proposizioni, oltre ad alcuni elementi del linguaggio, tutto un insieme di operazioni formali o regole di riscrittura.

Giusto come esempio, ricordiamo la regola dell'affermazione dell'antecedente (o modus ponens).

Partiamo da due enunciati: uno descrive un'implicazione; l'altro afferma l'antecedente di tale implicazione.

Ne possiamo dedurre che il conseguente dell'implicazione è vero.

In pratica:

“Se piove la strada è bagnata”,

“Piove”,

“La strada è bagnata”.

Poi ci sono regole di inferenza introdotte dal calcolo dei predicati. Tra queste, la specializzazione e la derivazione.

La specializzazione ci consente di semplificare la formula eliminando la quantificazione universale. Infatti, se qualcosa è vero per tutti gli elementi di un dominio, è vero anche per uno qualunque dei suoi membri.

Da questo enunciato possiamo ricavare quest'altro.

Ovvero: “Se tutti gli uomini sono mortali, anche Socrate (che è un uomo) è mortale”.

La derivazione è, in un certo senso, l'inverso della specializzazione.

Ci consente di ricavare la quantificazione esistenziale a partire da un caso particolare.

Perché se qualcuno fa parte di un insieme e ha una certa proprietà, vuol dire che nell'insieme esiste almeno un individuo che ha quella proprietà.

Se l'italiana Grazia Deledda ha vinto il premio Nobel, esiste almeno un italiano che ha vinto il premio Nobel.

1.12 Calcolo dei predicati e quadrilatero degli opposti

Con qualche eccezione, il calcolo dei predicati eredita dalla logica categorica, basata sui sillogismi, le regole implicite nel quadrilatero degli opposti.

Ecco due esempi, che partono da casi concreti.

Se non è vero che tutti i filosofi sono curiosi, allora esiste almeno un filosofo che non è curioso.

Qui partiamo da un enunciato universale.

La negazione di un enunciato universale afferma l'enunciato particolare (negativo) che, come indicato sulla diagonale del quadrilatero degli opposti, contraddice l'enunciato universale.

Ed ecco il secondo esempio: se non esiste almeno un filosofo curioso, allora ogni filosofo non è curioso.

In questo caso, partiamo da un enunciato particolare.

La negazione di un enunciato particolare afferma l'enunciato universale (negativo) che, come indicato sull'altra diagonale del quadrilatero degli opposti, contraddice l'enunciato particolare.

Ma, di fronte a formulazioni così astratte, è lecita la domanda: serve realmente tutto questo?

Tutto questo lavoro non serve solo a scoprire l'acqua calda?

1.13 Applicazioni concrete della logica formale

La logica è usata fin dall'antica Grecia come strumento per verificare con rigore se un ragionamento, proprio o altrui, è davvero valido.

Ma, al giorno d'oggi, la logica formale e, in particolare, il calcolo dei predicati si dimostrano molto utili in un'ampia gamma di campi applicativi.

E soprattutto nelle tecnologie informatiche:

- nell'ingegneria del software;
- nell'analisi dei dati;
- nei database relazionali;
- negli algoritmi per estrarre informazioni da ampie raccolte di dati testuali.

Vediamo alcuni casi reali. A cominciare dai metodi per l'analisi dei dati...

1.14 Il modello entità-relazione

Il modello "entità-relazione" è un metodo per l'analisi concettuale dei dati in un determinato settore.

Pensiamo, per un momento, al mondo editoriale, limitandoci agli scrittori e ai libri.

Scrittori e libri sono "entità", cioè classi di oggetti dello stesso tipo.

Quali dati abbiamo sull'entità "scrittore"? Certamente:

- codice
- nominativo
- anno di nascita

e molti altri. Questi dati sono chiamati "attributi" dell'entità "scrittore".

Codice, nominativo, anno di nascita e gli altri dati di uno stesso scrittore costituiscono una "ennupla". Si chiama così perché è un insieme composto da "enne" elementi.

È quindi evidente che l'entità "scrittore" contiene tante ennuple quanti sono gli scrittori presenti.

Per evitare ogni possibile equivoco (legato per esempio a un'omonimia), si usa un attributo, chiamato

“identificatore”, che ha un valore univoco per ogni entità. A questo servono i codici e i numeri di targa!

Anche per l’entità “libro” abbiamo diversi attributi. Tra questi:

- codice ISBN
- titolo
- anno di edizione.

Qui però manca qualcosa: il fatto che gli scrittori scrivono i libri.

Lo rappresentiamo con una relazione tra le due entità: la chiamiamo “è-autore-di”. Qui “relazione” è un termine usato proprio come nel calcolo dei predicati!

La relazione descrive il tipo di rapporto che intercorre non tanto tra le entità in astratto, ma tra le entità delle due entità.

Perché sono determinati autori che scrivono determinati libri!

Il modello entità relazioni è uno strumento ideale per rappresentare una casa editrice, ma anche una fabbrica o il sistema fiscale con migliaia di dati e milioni di entità.

Poi, a partire dalla rappresentazione astratta, dobbiamo realizzare il sistema tecnologico per gestire tutti questi dati. Che di solito è un database relazionale...

1.15 I database relazionali

Il modello relazionale fu proposto da Edgar F. Codd nel 1970. Poco dopo, nei primi anni ’80 era pronta la tecnologia per implementarlo. Da allora è il sistema più usato per realizzare basi di dati.

Un database relazionale è costituito da tabelle, chiamate “relazioni”: termine che confonde, perché non si tratta delle stesse relazioni di cui abbiamo parlato, quelle che collegano due o più entità.

Semplificando, per ogni classe del dominio, cioè per ogni entità, si costruisce una tabella.

In una tabella i dati sono organizzati per righe e colonne.

Ogni riga, chiamata “record”, corrisponde a una entità e descrive uno specifico oggetto dell’entità.

Ciascuna colonna, chiamata “campo”, fornisce i valori del medesimo attributo per i diversi oggetti. Usando la terminologia del calcolo dei predicati, potremmo considerare un campo come proprietà o predicato monadico.

Ma come facciamo a conoscere l’autore o gli autori di un libro? O i libri scritti da un autore?

In un database relazionale, sono tabelle anche le relazioni del modello entità-relazione.

Questa è la tabella della relazione “è-autore-di”:

- le colonne si riferiscono agli attributi identificatori delle entità collegate, in questo caso “scrittore” e “libro”.
- ogni riga rappresenta un caso particolare di relazione; in pratica, collega un libro al suo autore e viceversa.

Con questo database, per conoscere l’autore de “Il nome della rosa” dobbiamo scorrere la tabella dei libri, poi una volta trovato quello che cerchiamo, leggiamo il codice ISBN.

Col codice ISBN, passiamo alla tabella della relazione per cercare il record che corrisponde a quel codice. Quindi leggiamo il codice dell'autore e poi passiamo nella tabella degli scrittori per cercare a chi corrisponde e conoscerne nome, cognome, anno di nascita e quant'altro.

È un processo complesso, che però i computer eseguono molto velocemente.

Anche perché nei loro programmi le operazioni logiche sono ottimizzate con le regole del calcolo dei predicati.

1.16 La rappresentazione della conoscenza

Nel secolo scorso, per decenni il problema principale dell'intelligenza artificiale era la rappresentazione della conoscenza nella mente umana e nei computer:

- come rappresentare la conoscenza esperta;
- come rappresentare gli schemi mentali usati per interpretare uno scenario complesso;
- come rappresentare i piani usati per raggiungere uno scopo.

Era uno studio importante per lo sviluppo dei cosiddetti "sistemi esperti" e per una migliore interazione tra l'uomo e la macchina.

E oggi?

Considerando l'enorme quantità di informazione generata di continuo in forma digitale e spesso accessibile online, l'enfasi si è spostata sui metodi di rappresentazione della conoscenza di tipo enciclopedico e fattuale.

L'obiettivo è facilitare la ricerca mirata delle informazioni e permetterci di effettuare inferenze.

Per questo, sono stati definiti diversi standard di rappresentazione. Ci interessano, perché in genere sono ispirati al linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine!

1.17 Resource Description Format

Il più diffuso standard di rappresentazione della conoscenza è il linguaggio RDF, acronimo di Resource Description Format (cioè formato per la descrizione delle risorse). Una risorsa è qualunque cosa descritta dal linguaggio.

Vediamo come.

L'unità di base di RDF è una tripla (vale a dire una ennupla con tre elementi) che assomiglia molto a una relazione del calcolo dei predicati:

Soggetto - Predicato - Oggetto

Con RDF possiamo, per esempio, rappresentare un fatto come:

"Umberto Eco è autore di Il nome della rosa."

Ma anche fatti più complessi come:

"Roberto sa-che Umberto Eco è autore di Il nome della rosa".

RDF è nato nel contesto del web. Per questo motivo, si presta a effettuare ragionamenti basati su risorse online.

Tutte le risorse, comprese quelle che non si trovano direttamente sul web, sono identificate da un identificatore unico, detto URI (Uniform Resource Identifier), che assomiglia a un URL (Uniform Resource Locator), cioè a un indirizzo Internet.

Il linguaggio RDF ha moltissime applicazioni pratiche, che vanno da quelle di intelligence, che utilizzano le informazioni del web per la lotta al terrorismo, a quelle orientate al business.

E al fact checking che consente di smontare le fake news.

1.18 RDF e web semantico

A RDF è strettamente legata la nozione di “web semantico”, i cui contenuti siano facilmente navigabili e interpretabili dall’uomo, ma anche dai computer, per erogare servizi avanzati.

Con RDF sono stati creati database di grandi dimensioni. Di solito non vengono costruiti ad-hoc per specifiche applicazioni, ma sono il risultato dell’integrazione di informazioni già esistenti, sul web o altrove, in reti sempre più ampie.

Queste reti sono costituite da “linked data”, cioè da triple soggetto-predicato-oggetto collegate attraverso gli URL.

Ecco due esempi.

- Il primo è DBpedia, un progetto nato nel 2007, con l’obiettivo di estrarre informazioni strutturate da Wikipedia per pubblicarle sul web come linked data in formato RDF.
- Il secondo esempio è SoLiD (contrazione di Social Linked Data), un’iniziativa promossa recentemente da Tim Berners Lee, il “padre” del web. SoLiD vuole restituire ai titolari il controllo sui dati personali, sottraendolo al monopolio e allo sfruttamento commerciale dei big del web, che gestiscono i social network più diffusi. Con questo obiettivo, SoLiD propone un insieme di convenzioni per la strutturazione e la conservazione dei dati e per la costruzione di applicazioni sociali decentralizzate.

È un’ulteriore dimostrazione del fatto che la logica matematica è molto vicina alla vita di tutti i giorni.